Математическая модель 2 с учетом

В рассмотрение введены следующие обозначения для индексов:

1. *i* – индексы (номера) заданий, обрабатываемых в конвейерной системе;
2. *l –* индексы (номера) обрабатывающих приборов конвейерной системы,;
3. *j –* номера позиций пакетов заданий в последовательностях их (пакетов) выполнения на приборах конвейерной системы,
4. *w –* индексы типов заданий (номера наборов заданий, которые обрабатываются в конвейерной системе).

В рассмотрение введены обозначения для параметров, характеризующих конвейерную систему, а также выполняемые в ней задания:

1. *I* – количество заданий, выполняемых в системе;
2. *L* – количество обрабатывающих приборов, входящих в конвейерную систему;
3. *W* – количество типов заданий, обрабатываемых в системе (в состав пакета, занимающего *j-*ю позицию в последовательности их выполнения на приборах КС могут входить только задания одного типа (из одного набора заданий));
4. *J* – общее количество позиций, которые занимают ПЗ в последовательностях их выполнения на приборах КС (*J>W*);
5. *tlw* – длительности реализации операций с заданиями *w*-х типов (входящих в наборы заданий с индексами (номерами) *w*) на *l-*х приборах КС;  матрица длительностей выполнения заданий *w-*х типов на *l-*х приборах КС;
6. *awi* – параметр, характеризующий принадлежность *i-*го задания *w*-му набору заданий (*awi* =1 в случае, если *i-*е задание принадлежит *w-*му набору (если *i*-е задание имеет *w*-й тип); *awi* =0 в случае, если *i-*е задание не принадлежит *w-*му их набору);  матрица, элементы которой определяют принадлежность *i*-х заданий *w*-м наборам;
7. *plw*– длительности переналадок *l*-х приборов на выполнение заданий *w*-х типов; – матрица длительностей переналадок приборов на выполнение заданий *w*-х типов;
8. *nw–* количество заданий каждого w-го типа, которые должны быть обработаны в составе пакетов
9. *R,V* – достаточно большие числа, такие, что *R>V*.

В рассмотрение введены обозначения для бинарных и целочисленных переменных, значения которых соответствуют решению рассматриваемой задачи:

1) *mij* – переменная, характеризующая *i*-е задание, являющееся первым в пакете, занимающем *j*-ю позицию в последовательностях их выполнения на приборах КС (*mij* =1 в случае, если *i*-е задание является первым в пакете, занимающем *j-*ю позицию в последовательностях их выполнения на приборах КС, *mij* =0 в противном случае); матрица индексов заданий, являющихся первыми в пакетах, занимающих *j-*е позиции в последовательностях их выполнения на приборах КС;

2) *хji* – переменная, характеризующая принадлежность *i-*го задания пакету, занимающему *j*-ю позицию в последовательностях их выполнения на приборах КС (*хji* =1 в случае, если *i-*е задание входит в состав пакета, занимающего *j*-ю позицию в последовательностях их выполнения на приборах КС, *хji* =0 в противном случае);  матрица принадлежности *i*-х заданий пакетам, занимающих *j*-е позиции в последовательностях их выполнения на приборах КС;

3) *kis* – переменная, характеризующая упорядочивание заданий одного типа в пакетах (*kis* =1 в случае, если входящее в пакет *s-*е задание следует за *i*-м заданием; *kis* =0 в противном случае);  матрица порядка заданий *i*-х типов в пакетах;

4) *qli* – моменты времени начала выполнения *i*-х заданий на *l-*х приборах КС;  матрица моментов времени начала выполнения *i*-х заданий на *l-*х приборах КС;

5) *glj* – моменты времени окончания выполнения на *l*-х приборах ПЗ, занимающих в последовательностях π*l*  реализации действий с ними *j*-е позиции;  матрица моментов времени окончания выполнения на *l*-х приборах ПЗ, занимающих в последовательностях реализации действий с ними *j*-е позиции.

6) *Сmax* – момент времени окончания выполнения ПЗ в конвейерной системе (минимизируется в процессе оптимизации решений).

Математическая модель процесса выполнения ПЗ на приборах КС формируется в виде ограничений на множество допустимых решений по их составам и расписаниям их выполнения в задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Все дальнейшие рассуждения строятся в предположении, что  а также в предположении, что порядок выполнения пакетов заданий на всех приборах является одинаковым. В соответствии с введенными обозначениями дальнейшие рассуждения строятся с учетом номеров заданий одного типа, входящих в пакет, занимающий некоторую *j*-ю позицию в последовательностях π*l*  их выполнения на приборах КС, которые идентифицируются как *b* (то есть (*b=*1)-е, (*b*=2)-е и так далее – задания, входящие в пакет, количество заданий в пакете не может быть менее 2). Для *i*-го задания, являющегося первым (*b=*1) в пакете, занимающем (*j=*1)*-*ю позицию в последовательности π1 их выполнения на первом приборе, значение *q1i* определяется в соответствии с выражением вида (при условии, что 

где 

(1)

Тогда для *s*-го задания, входящего в пакет,занимающий (*j=1*)-ю позицию в последовательности π1 на (*l=*1)-м приборе, непосредственно следующим за первым заданием (*b=*2), значение *q1s* определяются в соответствии с выражением вида:



(2)

где 

Для остальных *s*-х заданий, включенных в пакет, занимающий (*j=1*)-ю позицию в последовательности π1 на (*l=*1)-м приборе, для которых *b*>2, значения *q1i* определяются в соответствии с выражением вида:



(3)

где *i-*е и *s-*е задания входят в один (*j*=1)-й пакет и *s-*е задание в этом пакете следует за *i-*м  Момент времени *g*11 окончания выполнения пакета, занимающего (*j=*1)-ю позицию в последовательности π1 выполнения заданий на (*l=*1)-м приборе, определяется как максимум среди моментов времени окончания реализации действий с входящими в него заданиями на основе выражения вида:



(4)

где .

На основе выражения (4) сформировано обобщенное условие, позволяющее определить значения *g*1*j* моментов времени окончания выполнения на (*l=*1)-м приборе ПЗ, занимающих в π1 *j*-е позиции, в виде:



(5)

где 

С учетом выражения (5) момент времени *q1i* начала выполнения на (*l*=1)-м приборе КС *i*-го задания, являющегося первым в пакете, занимающем *j*-ю позицию в последовательности π1, определяется выражением вида:

(2)



(6)

где 

Обобщенные условия, позволяющие определять значения *q1s* для *s*-х заданий, входящих в пакет,занимающий *j*-ю позицию () в последовательности π1 на (*l=*1)-м приборе, для которых *b>*1, синтезированы в виде:

– задание *s*, для которого *b*=2:



(7)

где 

– задания *s*, для которых *b*>2:



(8)

где 

Если *i*-е задание является первым (*b*=1) по счету в пакете, занимающем (*j*=1)-ю позицию в последовательностях π*l*  их выполнения на приборах КС, то значение *qli* для него определяется в соответствии со следующим условием:



(9)

где 

Момент времени *q1s* начала выполнения второго по счету задания (*b*=2) в пакете, занимающем (*j*=1)-ю позицию в последовательностях π*l*  определяется как максимум среди моментов времени окончания выполнения этого же задания на предшествующем (*l*-1)-м приборе и первого (*b*=1) задания в этом же пакете на рассматриваемом *l*-м приборе в соответствии с выражением вида (сформированном на основе (2)):



(10)

где 

Для остальных заданий (с порядковыми номерами *b*>2), входящих в пакет, занимающий (*j*=1)-ю позицию в последовательностях π*l*  моменты времени *qls* определяются на основе выражения, сформированного с учетом (8), (10) в виде (при *j*=1):



(11)

где 

На основе (4) сформировано выражение, позволяющее определить значения *gl,*1 моментов времени окончания выполнения на *l*-х приборах ПЗ, занимающих в π*l*  (*j*=1*)*-ю позицию, как максимум среди моментов времени окончания выполнения заданий, входящих в него:



(12)

где 

Выражения (5) и (12) обобщены для  с целью определения значений *glj* для всех ПЗ, входящих в последовательности π*l* на *l-*х приборах  в виде (определяется максимум среди моментов времени окончания выполнения заданий, входящих в эти пакеты):



(13)

где 

C учетом (6) и (13) сформировано выражение для определения значений *qli* для *i*-х заданий, являющихся первыми (*b*=1) в пакетах,занимающих *j*-е позиции в последовательностях π*l* на *l*-х приборахимеющее следующий вид:



(14)

где 

Выражение (10) обобщено с целью определения значений *qli* для *i*-х заданий, являющихся вторыми (*b*=2) в пакетах,занимающих *j*-е позиции в последовательностях π*l* на *l*-х приборах  Полученное выражение имеет вид:



(15)

где 

Выражение (11) обобщено с целью вычисления значений *qls* для *s*-х заданий с порядковыми номерами *b>*2 в пакетах,занимающих *j*-е позиции в последовательностях π*l* на *l*-х приборах  Полученное выражение имеет вид:



(16)

где 

В дополнение к введенным ограничениям синтезировано ограничение, позволяющее определить момент времени окончания выполнения ПЗ в КС как максимум среди моментов времени окончания реализации действий с ними на последнем *L*-м приборе, имеющее вид:

(17)

 где 

В силу того, что выражения (14)-(16) являются нелинейными, требуется их линеаризация. Способ линеаризации операции *max* предложен в [ , ], который в случае выбора максимального из двух заданных значений интерпретируется следующим образом. Вид операции определения максимального значения для двух аргументов: *z*=max(*x*1,*x*2). Каждой переменной *x*1 и *x*2 соответствует бинарная переменная *y*1 и *y*2. В случае *x*1>*x*2 значения *y*1=0, *y*2=1. В случае значения *y*1=1, *y*2=0. Линеаризация выражения *z*=max(*x*1,*x*2) предусматривает его замену системой неравенств следующего вида [ , ]:



(18)

(19)





(20)

Применение рассмотренного способа для линеаризации (14) реализовано путем введения переменных *y*11*li*, *y*12*li* Значения *y*11*li*=0, *y*12*li*=1, если Значения *y*11*li*=1, *y*12*li*=0, если  Результатом линеаризации (14) является система неравенств следующего вида:



(21)



(25)

(24)

(23)

(22)







где 

Для линеаризации (15) введены переменные *y*21*li* и *y*22*li*  Значения *y*21*li*=0, *y*22*li*=1, если  и *y*21*li*=1, *y*22*li*=0, если Результатом линеаризации выражения (15) является система неравенств следующего вида:



(27)

(26)

**



(28)

**

(30)

(29)



где 

Для линеаризации выражения (16) введены переменные *y*31*li* и *y*32*li*. Значения *y*31*li*=0, *y*32*li*=1, если  и *y*31*li*=1, *y*32*li*=0, если  Результатом линеаризации выражения (16) является система неравенств следующего вида:



(31)



(32)



(33)



(35)

(34)



(35)

где 

Таким образом, выражения (1), (4)-(7), (12)-(15), а также выражения (20)-(34), представляющие собой результат линеаризации выражений (12)-(15), являются ограничениями, соответствующими процессу выполнения пакетов заданий на приборах КС (интерпретируют математическую модель процесса выполнения пакетов заданий на приборах КС). В дополнении к ним синтезированы ограничения, соответствующие распределению заданий по пакетам:

1. ограничение, определяющее необходимость единственного задания, являющегося первым в каждом пакете:

 где 

1. ограничение, определяющее, что каждое задание может входить только в единственный пакет:

 где 

(36)

3) ограничение, определяющее, что в каждый пакет, занимающий некоторую *j*-ю позицию в последовательностях π*l* на *l*-х приборах  должно входить не менее двух заданий:

 где 

(37)

4) ограничения, определяющие, что *i-*е и *s*-е задания, входящие в один пакет, занимающий *j*-ю позицию в последовательностях π*l* на *l*-х приборах  принадлежат одному типу:

(39)

(38)

 где 

 где 

5) ограничение, соответствующее реализации свойства антисимметричности отношения порядка, определяющего последовательность *i*-го и *s*-го заданий одного *w-*го типа в пакете, занимающего *j*-ю позицию в последовательностях π*l* на *l*-х приборах 

(40)

 где 

6) ограничение, определяющее, что каждому заданию в пакете может либо не предшествовать ни одного задания (если рассматриваемое задание является первым в пакете), либо заданию может предшествовать только одно задание:

(43)

(42)

(41)

 где 

7) ограничение, определяющее, что если *i*-е задание является первым в пакете, занимающим *j*-ю позицию в последовательностях π*l* (то есть имеет номер *b=*1 в этом пакете), то повторно входить в этот же пакет с другим номером *b*>1 это задание уже не может (то есть, при *mij*=1 требуется, чтобы *хji*=0):

 где 

обратные рассуждения позволили сформировать ограничение вида:

 где 

8) ограничение, определяющее, что если *i*-е задание является первым в пакете, занимающем *j*-ю позицию в последовательностях π*l*  их выполнения на приборах КС (то есть, *mij*=1), и значение переменной *kis*=1, то *s*-е задание тоже должно быть включено в этот же пакет (то есть, переменной *xjs* должно быть присвоено значение 1); если *i*-е задание не является первым в пакете, занимающем *j*-ю позицию в последовательностях π*l*  их выполнения на приборах КС, но входит в этот пакет (то есть, *хji*=1), и значение переменной *kis*=1, то *s*-е задание тоже должно быть включено в этот же пакет (то есть, переменной *xjs* должно быть присвоено значение 1); в соответствии с приведенными рассуждениями сформированы ограничения следующего вида (при условии, что если *mij*=0, то  и если *xji*=0, то  гарантируемом выполнением ограничений (42), (43)):

 где 

(44)

обратные рассуждения позволили сформировать ограничение вида:

(45)

 где 

Возможен альтернативный вариант ограничения в виде (если не получиться с первым вариантом):

 где 

1. ограничения, аналогичные (44)-(45), позволяют задавать значение переменной *kis* равным 1 в случае, когда *mij*=1 и *xjs*=1, либо в случае, когда *xji*=1 и *xjs*=1; полученные ограничения имеют вид:

где 

(46)

 где 

(47)

11) ограничение, определяющее, что по пакетам должны быть распределены все задания каждого *w*-го типа 

 где 

(48)

В результате выполненных рассуждений сформирована математическая модель целочисленного программирования оптимизации составов ПЗ и расписаний их выполнения на приборах КС. В ее основу положены выражения (6)-(9), (13)-(17),(35)-(48), а также выражения (21)-(35), являющиеся итогом линеаризации выражений (14)-(16). Полученная в результате математическая модель целочисленного линейного программирования имеет следующий вид:

1) Целевая функция: *min Cmax*;

2) Ограничения:

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

где 

где 

где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

** где 

 где

** где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 

 где 